

Cuprins

TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ	5
----------------------------------	---

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Lecția 1. Mulțimi. Descriere, notații, reprezentări; mulțimi numerice, mulțimi nenumerice; relația dintre un element și o mulțime	8
Lecția 2. Relații între mulțimi	13
Lecția 3. Mulțimi finite, cardinalul unei mulțimi finite, mulțimi infinite, mulțimea numerelor naturale	16
Lecția 4. Operații cu mulțimi	21
Teste de evaluare sumativă	25
Fișă pentru portofoliul elevului	27
Lecția 5. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime	28
Lecția 6. Cel mai mare divizor comun a două sau mai multor numere naturale	31
Lecția 7. Numere naturale prime între ele	34
Lecția 8. Cel mai mic multiplu comun a două sau mai multor numere naturale	37
Lecția 9. Proprietăți ale relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$	41
Teste de evaluare sumativă	44
Fișă pentru portofoliul elevului	46
Model de test pentru Evaluarea Națională	48

CAPITOLUL II. RAPOARTE. PROPORȚII

Lecția 10. Rapoarte	50
Lecția 11. Proporții. Proprietatea fundamentală a proporțiilor	54
Lecția 12. Determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție	58
Lecția 13. Proporții derivate cu aceiași termeni. Proporții derivate cu alți termeni	62
Lecția 14. Șir de rapoarte egale	67
Lecția 15. Procente	70
Teste de evaluare sumativă	74
Fișă pentru portofoliul elevului	76
Lecția 16. Mărimi direct proporționale	78
Lecția 17. Mărimi invers proporționale	81
Lecția 18. Regula de trei simplă	85
Lecția 19. Elemente de organizare a datelor	89
Lecția 20. Probabilități	94
Teste de evaluare sumativă	98
Fișă pentru portofoliul elevului	101
Model de test pentru Evaluarea Națională	103

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

Lecția 1. Unghiuri adiacente	105
Lecția 2. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi	109
Lecția 3. Unghiuri complementare, unghiuri suplementare	113
Lecția 4. Unghiuri opuse la vârf	115

Lecția 5. Unghiuri în jurul unui punct.....	119
Teste de evaluare sumativă	122
Fișă pentru portofoliul elevului	125
Lecția 6. Unghiuri formate de două drepte cu o secantă	127
Lecția 7. Drepte paralele	130
Lecția 8. Unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă.....	134
Teste de evaluare sumativă	138
Fișă pentru portofoliul elevului	141
Lecția 9. Drepte perpendiculare în plan. Oblice.....	143
Lecția 10. Distanța de la un punct la o dreaptă	146
Lecția 11. Mediatoarea unui segment. Construcția mediatoarei unui segment	150
Lecția 12. Simetria față de o dreaptă.....	154
Teste de evaluare sumativă	157
Fișă pentru portofoliul elevului	160
Lecția 13. Cercul.....	161
Lecția 14. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc.....	165
Lecția 15. Pozițiile relative a două cercuri	169
Teste de evaluare sumativă	173
Fișă pentru portofoliul elevului	175
Model de test pentru Evaluarea Națională	177
MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA CUNOȘTINTELOR.....	179
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	183

Teste de evaluare inițială

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

- (0,5p) 1. Produsul numerelor naturale 75 și 24 este egal cu:
A. 1980; B. 1800; C. 1880; D. 1900.
- (0,5p) 2. Cel mai mic număr natural de patru cifre diferite divizibil cu 5 este:
A. 1025; B. 1235; C. 1230; D. 1205.
- (0,5p) 3. Media aritmetică a numerelor naturale 71 și 92 este egală cu:
A. 83,2; B. 86; C. 87; D. 81,5.
- (0,5p) 4. Scriind sub formă de fracție ordinară ireductibilă 56%, obținem:
A. $\frac{25}{16}$; B. $\frac{16}{75}$; C. $\frac{14}{25}$; D. $\frac{28}{50}$.
- (0,5p) 5. Dacă numărul natural $\overline{546x}$ are cifrele diferite și este divizibil cu 2, atunci cifra x poate fi:
A. 2 sau 8; B. 2, 4 sau 6; C. 0, 2 sau 8; D. 4 sau 6.
- (0,5p) 6. Frația $\frac{9}{3^n}$ este echiunitară pentru n egal cu:
A. 1; B. 2; C. 3; D. 4.
- (0,5p) 7. Calculând $\frac{5}{8}$ din 72 kg, obținem:
A. 50 kg; B. 24 kg; C. 36 kg; D. 45 kg.
- (0,5p) 8. Capacitatea în litri a unui rezervor în formă de cub cu muchia de 1 m este egală cu:
A. 1000 ℓ; B. 200 ℓ; C. 500 ℓ; D. 3000 ℓ.
- (0,5p) 9. Perimetrul triunghiului cu lungimile laturilor de 3,5 m, 5,9 m, respectiv 4,6 m este egal cu:
A. 13,8 m; B. 20 m; C. 14 m; D. 12,5 m.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete:

- (0,7p) 1. Calculați: $10 \cdot (701 - 2^5 \cdot 3^3 : 72)$.
- (0,8p) 2. a) Transformați fracțiile zecimale $x = 1,75$, $y = 2,(6)$ și $z = 1,3(8)$ în fracții ordinare ireductibile.
- (0,8p) b) Rotunjiți la a treia zecimală numărul rațional pozitiv $f = (x + z - y) : 0,(3)$.
3. Se consideră un dreptunghi de lungime L și lățime l , care are aria egală cu 98 cm^2 și $L = 2l$.
- (0,8p) a) Calculați lățimea dreptunghiului.
- (0,7p) b) Calculați lungimea dreptunghiului.
- (0,7p) c) Calculați perimetrul dreptunghiului.

ALGEBRĂ

Capitolul I

MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Lecția 1. Mulțimi. Descriere, notații, reprezentări; mulțimi numerice, mulțimi nenumerice; relația dintre un element și o mulțime



Citesc și rețin

Mulțimea este o colecție de obiecte diferite, având **aceeași** proprietate. Obiectele din mulțime se numesc **elementele mulțimii**.

Mulțimile se notează cu **litere mari**, iar elementele mulțimilor se notează cu **litere mici**, cifre, numere etc.

Elementele unei mulțimi se scriu între paranteze acolade, despărțite prin virgulă, într-o ordine oarecare.

Într-o mulțime un element este scris **o singură dată**.

Dacă A este o mulțime și a , un element al său, atunci notăm $a \in A$ și citim „elementul a **aparține** mulțimii A ”.

Dacă a nu este un element al mulțimii A , atunci notăm $a \notin A$ și citim „elementul a **nu aparține** mulțimii A ”.

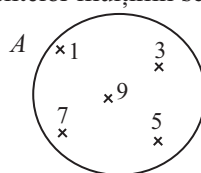
O mulțime poate fi reprezentată în mai multe moduri:

1. prin enumerarea fiecărui element al mulțimii scris între paranteze acolade;

Exemplu: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Citim: „Mulțimea A este formată din elementele 1, 3, 5, 7 și 9”.

2. prin enumerarea tuturor elementelor mulțimii scrise în interiorul unei linii curbe închise numite diagramă;

Exemplu:



3. enunțând o proprietate caracteristică a elementelor mulțimii.

Exemplu: $A = \{x \mid x \text{ este cifră impară}\}$. Citim: „Mulțimea A este formată din elementele x cu proprietatea că x este cifră impară”.



Cum se aplică?

1. Scrieți mulțimea divizorilor numărului natural 20, notând-o cu litera A .

Soluție:

Mulțimea divizorilor numărului natural 20 este: $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

2. Se consideră mulțimea $E = \{x \text{ este număr natural} \mid 2^x < 32\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $0 \in E$; b) $5 \in E$; c) $2 \notin E$; d) $4 \in E$.

Soluție:

Mai întâi, vom enumera elementele mulțimii E . $2^x < 32$, sau $2^x < 2^5$, deci $x < 5$, prin urmare $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ de unde rezultă valoarea de adevăr a propozițiilor: a) A; b) F; c) F; d) A.

3. Enumerați elementele mulțimii $A = \left\{ \overline{xyz} \mid x = \frac{y+z}{4}, 0 < y < z \right\}$.

Soluție:

Dacă $x = 1$, atunci $y = 1$ și $z = 3$, dacă $x = 2$, atunci $y = 1$ și $y = 7$ sau $y = 2$ și $z = 6$ sau $y = 3$ și $z = 5$; dacă $x = 3$, atunci $y = 3$ și $z = 9$ sau $y = 4$ și $z = 8$ sau $y = 5$ și $z = 7$; dacă $x = 4$, atunci $y = 7$ și $z = 9$; pentru $x > 4$ nu avem soluții. Prin urmare, mulțimea se scrie $A = \{113, 217, 226, 235, 339, 348, 357, 479\}$.



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Stabiliți care dintre următoarele propoziții reprezintă o mulțime și completați caseta cu răspunsul corespunzător „Da” sau „Nu”. Justificați răspunsul.

- a) $A = \{1, 2, 3, 1\}$; ☐ b) $B = \{a, b, c, d, \}$; ☐ c) $C = \{l, m, n, P\}$; ☐
d) $D = [f, g, h, i]$; ☐ e) $e = \{1, 3, 5, 7\}$; ☐ f) $F = \{1, 7, 8, 9\}$. ☐

2. Citiți următoarele mulțimi:

- a) $A = \{d, e, f, g, h\}$; b) $B = \{4, 5, 6, 7, 9\}$;
c) $C = \{x \text{ este număr natural} \mid 1 < x \leq 7\}$; d) $D = \{x \text{ este număr natural par} \mid x > 5\}$.

3. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Mulțimea $A = \{a, b, c, d, f\}$ este reprezentată prin:

- A. enumerarea fiecărui element;
B. enunțarea unei proprietăți caracteristice a elementelor.

4. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Mulțimea $E = \{x \text{ este număr natural} \mid x < 4\}$ este reprezentată prin:

- A. enumerarea fiecărui element;
B. enunțarea unei proprietăți caracteristice a elementelor.

5. Reprezentați fiecare dintre următoarele mulțimi printr-o diagramă:

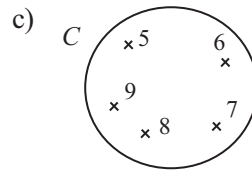
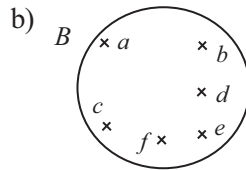
- a) $A = \{m, n, o, p, t\}$; b) $B = \{7, 9, 11, 13\}$.

a)

a) A



A circle containing four points labeled x_0 , x_1 , x_2 , and x_3 . x_0 is at the top-left, x_1 is at the top-right, x_2 is at the bottom-left, and x_3 is at the bottom-right.



A. $\left\{\frac{3}{0}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}\right\}$; B. $\left\{\frac{3}{1}, \frac{3}{2}\right\}$; C. $\left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{3}\right\}$; D. $\left\{\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}\right\}$.

a) $A = \{x \text{ este număr natural} \mid x < 6\} = \dots\dots\dots$
 b) $B = \{x \text{ este număr natural} \mid x \leq 4\} = \dots\dots\dots$
 c) $E = \{x \text{ este număr natural} \mid 1 < x \leq 7\} = \dots\dots\dots$
 d) $F = \{x \text{ este număr natural} \mid 3 \leq x \leq 9\} = \dots\dots\dots$

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; b) $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$; c) $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

a) $A = \{x \mid x \text{ este literă a cuvântului „matematica”}\} = \dots\dots\dots$
 b) $B = \{y \mid y \text{ este cifră a numărului „4237457286”}\} = \dots\dots\dots$

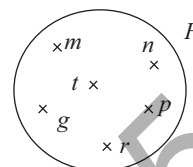
a) $\mathcal{D}_{15} =$; b) $\mathcal{D}_{21} =$;
c) $\mathcal{D}_{28} =$; d) $\mathcal{D}_{30} =$

14. Se consideră mulțimea $D = \{1, 3, 5, 8, 9\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $1 \in D$; ☐ b) $3 \in D$; ☐ c) $5 \notin D$; ☐ d) $7 \notin D$; ☐
 e) $9 \in D$; ☐ f) $2 \notin D$; ☐ g) $8 \notin D$; ☐ h) $5 \in D$; ☐

15. Folosind diagrama alăturată completați caseta cu simbolul corespunzător „ $\in$ ” sau „ $\notin$ ”.

- a) l ☐ F ; b) g ☐ F ; c) r ☐ F ;
 d) t ☐ F ; e) h ☐ F ; f) m ☐ F .



Exerciții și probleme de dificultate redusă

16. Enumerați elementele mulțimii $E = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} \text{ este număr natural pătrat perfect, } a \neq 0\}$.

17. Enumerați elementele mulțimii:

- a) $A = \{n \mid 2^n < 37, n \text{ este număr natural}\}$;
 b) $B = \{n \mid 3^n \leq 81, n \text{ este număr natural}\}$.

18. Enumerați elementele mulțimii $E = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} \text{ este număr prim și } \overline{ba} \text{ este număr prim, } a \neq 0, b \neq 0\}$.

19. Enumerați elementele mulțimii:

- a) $A = \{a \mid a \text{ este cifră și } 173a8 < 17aa8\}$; b) $B = \{a \mid a \text{ este cifră și } 51aa3 \geq 51a63\}$.

20. Știind că n este număr natural, enumerați elementele mulțimii:

- a) $D = \{n \mid 3^{n+1} \leq 9^4\}$; b) $E = \{n \mid 2^{n+4} < 8^3\}$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

21. Se consideră mulțimea $M = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} = 4n + 3, \text{ unde } n \text{ este număr natural, } a \neq 0\}$. Arătați că:

- a) $31 \in M$; b) $47 \in M$; c) $63 \in M$; d) $75 \in M$.

22. Se consideră mulțimea $E = \{\overline{xyz} \mid \overline{xyz} = 10n + 9, \text{ unde } n \text{ este număr natural, } x \neq 0\}$.

- a) Determinați cel mai mic element al mulțimii E .
 b) Determinați cel mai mare element al mulțimii E .

23. Enumerați elementele mulțimii $E = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} \text{ este număr prim, } a \neq 0 \text{ și } u(\overline{ab}^2) = b\}$.

24. Se consideră mulțimea $E = \{a \text{ este număr natural} \mid a < 4\}$. Determinați mulțimile:

- a) $A = \{x \mid x = 3a, a \in E\}$; b) $B = \{y \mid y = a^2, a \in E\}$;
 c) $C = \{z \mid z = 2a + 1, a \in E\}$; d) $D = \{t \mid t = a^3 + 2, a \in E\}$.

25. Scrieți mulțimea A , folosind o proprietate a elementelor:

- a) $A = \{142, 412, 124, 214, 222, 118\}$; b) $A = \{401, 221, 311, 131, 113, 203\}$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

26. Se consideră mulțimea $A = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 3$. Dacă a și b sunt două elemente de aceeași paritate ale mulțimii A , arătați că numărul $\frac{a+b}{2}$ este element al mulțimii A .

27. Enumerați elementele mulțimilor:

a) $A = \{\overline{xyz} \mid x \cdot z = y^2, x > z > 0\}$; b) $B = \{\overline{xyz} \mid x \cdot z = y^3, x \geq z > 0\}$.

28. Arătați că suma elementelor mulțimii $E = \left\{ \overline{\frac{ab}{ba}} \mid \overline{\frac{ab}{ba}} = \frac{7}{4}, a \neq 0, b \neq 0 \right\}$ este număr natural.

29. Se consideră mulțimea $E = \{\overline{ab} \mid ab : (a-b)^3, a > b\}$. Enumerați elementele mulțimii E .

30. Se consideră mulțimea $A_n = \{2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^n\}$, unde n este număr natural, $n \geq 1$. Arătați că oricum am alege două elemente din mulțimea A , suma sau diferența lor este divizibilă cu 3.

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

31. Determinați mulțimea $A = \{\overline{ab} \mid a, b \text{ sunt cifre nenule și } ab \text{ se divide cu } a+b\}$.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 9/2024)

32. Se consideră mulțimile $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_3 = \{4, 5, 6\}$ etc. Determinați numărul minim de elemente ce trebuie șterse din mulțimea A_{41} , pentru ca suma elementelor rămase să fie pătrat perfect.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Enumerați elementele mulțimii $A = \{x \mid x \text{ este literă a cuvântului „aritmetica”}\}$.

(3p) **2.** Enumerați elementele mulțimii $D = \{n \mid n \text{ este număr natural și } 5^{n+2} \leq 125^3\}$.

(3p) **3.** Se consideră mulțimea $E = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} + ab = \overline{ba} + a + b, a \neq 0\}$. Arătați că suma elementelor mulțimii E este divizibilă cu 10.

26. Se consideră numărul natural $\overline{abcdef}$, $a \neq 0$, $d \neq 0$. Știind că $37 \mid \overline{abcdef}$, arătați că $37 \mid \overline{defabc}$.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 3/2006)

27. Notăm cu S_i și S_p suma divizorilor improprii, respectiv suma divizorilor proprii ai numărului 2^n , unde $n \geq 2$ este număr natural. Arătați că $3 \mid S_i$ dacă și numai dacă $3 \mid S_p$.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 6-7-8/2018)



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (3p) **1.** Știind că $7 \mid a$ și $7 \mid b$, arătați că $7 \mid 8a + 9b$, unde a și b sunt numere naturale.
- (3p) **2.** Se consideră numărul natural $\overline{xyz}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. Dacă $4 \mid \overline{xyz}$, arătați că $4 \mid \overline{xyz} + \overline{yz}$.
- (3p) **3.** Știind că $\overline{a0b} : (a+b)$, arătați că $\overline{b0a} : (a+b)$, unde $a \neq 0$ și $b \neq 0$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

- (1p) **1.** Scriind numărul natural 40 ca produs de puteri de numere prime, obținem:
A. $2 \cdot 5^2$; B. $2^2 \cdot 5$; C. $2^3 \cdot 5$; D. $2 \cdot 5^3$.
- (1p) **2.** Cel mai mare divizor comun al numerelor naturale 28 și 42 este egal cu:
A. 21; B. 6; C. 7; D. 14.
- (1p) **3.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale 18 și 45 este egal cu:
A. 108; B. 90; C. 72; D. 100.
- (1p) **4.** Dintre următoarele mulțimi, cea care are elementele numere naturale prime între ele este:
A. $\{49, 64\}$; B. $\{30, 51\}$; C. $\{28, 62\}$; D. $\{20, 75\}$.
- (1p) **5.** Cel mai mic număr de pagini ale unei cărți care pot fi citite și câte 36 pe zi, și câte 48 pe zi, este egal cu:
A. 108; B. 120; C. 144; D. 160.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvările complete:

- (1p) **1.** Determinați numerele naturale $\overline{ab}$, $a \neq 0$, cu proprietatea $(\overline{ab}; 60) = 12$.
- (1p) **2.** Determinați numărul natural n pentru care $[2^n + 2^{n+4}; 2^{n+8} - 2^n] = 2040$.
- (1p) **3.** Determinați numerele naturale m și n care îndeplinesc condițiile $m \cdot n = 1944$ și $[m; n] = 216$.
- (1p) **4.** Știind că $(a; b) = 1$, arătați că $(a; a+b) = 1$, unde a și b sunt numere naturale.

Capitolul II

RAPOARTE. PROPORȚII

Lecția 10. Rapoarte



Citesc și rețin

Definiție: Raportul numerelor raționale pozitive a și b este câtul $a : b$, notat $\frac{a}{b}$.

Numererele a și b se numesc **termenii raportului**.

Exemplu: Raportul numerelor 8 și 5 este $\frac{8}{5}$.

Definiție: Valoarea raportului $\frac{a}{b}$ este câtul împărțirii $a : b$.

Exemplu: Valoarea raportului $\frac{8}{5}$ este egală cu $8 : 5 = 1,6$.

Rapoarte utilizate în practică

Raport procentual

Un raport de forma $\frac{p}{100}$, $p \in \mathbb{Q}_+$, notat $p\%$, se numește **raport procentual** ($p\%$ se citește „ p la sută”).

Exemplu: $23\% = \frac{23}{100}$.

Scara unei hărți

Scara unei hărți, notată cu S , este raportul dintre distanța dintre două puncte de pe hartă și distanța dintre cele două puncte din teren.

Exemplu: Fie A și B două localități situate la distanța de 10 km. Dacă pe hartă distanța AB este de 1 cm, determinați scara hărții.

$$S = \frac{1 \text{ cm}}{10 \text{ km}} = \frac{0,01 \text{ m}}{10000 \text{ m}} = \frac{1}{1000000}.$$

Concentrația unei soluții

Concentrația unei soluții, notată cu C , este raportul dintre masa substanței care se dizolvă și masa soluției.

Exemplu: Într-un vas se află o soluție de sare cu apă. Dacă masa soluției este de 300 g, iar cea a sării este de 6 g, aflați concentrația soluției.

$$C = \frac{6 \text{ g}}{300 \text{ g}} = \frac{2}{100} = 2\%.$$

Titlul unui aliaj

Titlul unui aliaj, notat cu T , este raportul dintre masa metalului prețios și masa aliajului.

Exemplu: Un aliaj de argint și aluminiu conține 16 g argint și 184 g aluminiu. Aflați titlul aliajului.

$$T = \frac{16 \text{ g}}{16 \text{ g} + 184 \text{ g}} = \frac{16 \text{ g}}{200 \text{ g}} = \frac{8}{100} = 8\%.$$



a) 35 și 16;

a) $\frac{35}{16}$;

$$\text{b) } \frac{24^{(6)}}{42} = \frac{4}{7}.$$

a) $\frac{6}{5}$;

b) $\frac{5}{6}$.

$$\text{a) } \frac{6}{5} = 6 : 5 = 1,2;$$

$$\text{b) } \frac{5}{6} = 5 : 6 = 0,8(3).$$

$$\frac{x}{y} = 1, (6) \Rightarrow \frac{0,2(7)}{y} = 1, (6) \Rightarrow y = 0,2(7) : 1, (6) \Rightarrow y = \frac{27-2}{90} : 1 \frac{6}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{25}{90} : 1\frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{18} : \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{18} \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow y = \frac{1}{6}.$$



1. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. Raportul numerelor rationale pozitive x și y se scrie:

A. $\frac{y}{x}$;

$$\text{B. } x : y;$$
$$\text{C. } y : x;$$

D. $\frac{x}{y}$.

Numerele	5 și 7	4 și 9	7 și 6	16 și 12	15 și 20	35 și 56
Raportul numerelor						

a) $AB = 45$ cm și $CD = 60$ cm;

b) $AB = 48$ cm și $CD = 72$ cm;

c) $AB = 120$ m și $CD = 210$ m;

d) $AB = 140$ m şi $CD = 180$ m.

4. Completați tabelul următor efectuând calculele mintal:

Raportul	$\frac{9}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{6}{5}$
Valoarea raportului				

Exerciții și probleme de dificultate redusă

5. Determinați raportul lungimilor segmentelor AB și CD , știind că:

- a) $AB = 54$ cm și $CD = 3,6$ dm; b) $AB = 2,4$ dam și $CD = 90$ m;
c) $AB = 1,08$ hm și $CD = 7200$ cm; d) $AB = 0,036$ km și $CD = 540$ dm.

6. Aflați valorile următoarelor rapoarte:

- a) $\frac{34}{25}$; b) $\frac{8}{3}$; c) $\frac{7}{6}$; d) $\frac{43}{12}$.

7. Valoarea raportului $\frac{x}{y}$ este egală cu 0,4. Determinați numărul rațional x , dacă:

- a) $y = 10$; b) $y = 2,5$; c) $y = 1,2$; d) $y = 3,(3)$.

8. Dacă $\frac{a}{b} = 2,(6)$, determinați numărul rațional pozitiv b în cazurile:

- a) $a = 0,8$; b) $a = 1,(3)$; c) $a = 0,(6)$; d) $a = 3,2$.

9. Determinați raportul lungimilor laturilor a două triunghiuri echilaterale, știind că raportul perimetrelor lor este egal cu:

- a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{6}{7}$; c) $\frac{4}{9}$; d) $\frac{8}{5}$.

10. Raportul lungimilor laturilor a două pătrate este egal cu $\frac{4}{5}$. Determinați:

- a) raportul perimetrelor celor două pătrate; b) raportul ariilor celor două pătrate.

11. Scrieți următoarele rapoarte sub formă procentuală:

- a) $\frac{13}{10}$; b) $\frac{16}{25}$; c) $\frac{27}{20}$; d) $\frac{3}{2}$; e) $\frac{1}{4}$; f) $\frac{6}{5}$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

12. Terenul de fotbal al unei școli are lățimea egală cu 45 m și perimetrul egal cu 240 m. Scrieți raportul dintre lungimea și lățimea terenului de fotbal.

13. Un dreptunghi are lungimea de 60 dm și aria de 27 m². Aflați valoarea raportului dintre lățimea și lungimea dreptunghiului.

14. Determinați raportul dintre (x, y) și $[x, y]$ în următoarele cazuri:

- a) $x = 12$ și $y = 18$; b) $x = 20$ și $y = 24$; c) $x = 45$ și $y = 60$.

15. Distanța dintre orașele Cluj și Arad este de 270 km, iar pe hartă, distanța dintre cele două orașe este egală cu 27 cm. Aflați scara la care este realizată harta respectivă.

16. Într-un vas se află o soluție de sare cu apă. Știind că masa soluției este egală cu 240 g și conține 60 g de sare, calculați concentrația soluției.

17. Într-o cantitate de 500 g apă, Maria dizolvă 125 g zahăr. Calculați concentrația soluției preparate de Maria.

18. Un aliaj de argint și aluminiu conține 65 g argint și 435 g aluminiu. Calculați titlul aliajului.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

19. Determinați numerele naturale a și b , știind că raportul lor este egal cu $\frac{3}{7}$, iar suma lor este mai mică decât 37.

20. Determinați raportul $\frac{ab}{ba}$, $a \neq 0$ și $b \neq 0$, știind că valoarea raportului $\frac{a}{b}$ este o fracție zecimală periodică mixtă.

21. Determinați raportul numerelor p și q în următoarele cazuri:

a) $p = 1 + 2 + 3 + \dots + 24$ și $q = 1 + 2 + 3 + \dots + 50$;

b) $p = 1 + 2 + 3 + \dots + 80$ și $q = 1 + 2 + 3 + \dots + 99$.

22. Determinați raportul numerelor m și n în următoarele cazuri:

a) $m = 1 + 3 + 5 + \dots + 17$ și $n = 1 + 3 + 5 + \dots + 29$;

b) $m = 1 + 3 + 5 + \dots + 19$ și $n = 1 + 3 + 5 + \dots + 23$.

23. Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, raportul numerelor p și q este constant:

a) $p = 2^{n+2} - 2^n$ și $q = 2^{n+4} - 2^n$;

b) $p = 3^{n+2} - 3^n$ și $q = 3^n + 3^{n+3}$.

24. Rotunjiți la a patra zecimală valoarea raportului dintre cel mai mare număr natural de două cifre care are 3 divizori și cel mai mic număr natural de două cifre care are 8 divizori.

25. Se consideră numerele $a = 1 + 2 + 3 + \dots + 48$ și $b = 49 + 50 + 51 + \dots + 98$. Rotunjiți la prima zecimală valoarea raportului numerelor naturale a și b .

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

26. Determinați numărul natural $\overline{ab}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, știind că valoarea raportului dintre suma și produsul cifrelor sale este egală cu 0,5.

27. Se consideră numerele $a = 3^n + 3^{n+1}$ și $b = 2^n + 2^{n+3}$, unde $n \in \mathbb{N}$. Dacă $\frac{a}{b} = 2,25$, determinați numărul natural n .



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) 1. Scrieți raportul numerelor naturale:

a) 11 și 24;

b) 36 și 27.

(3p) 2. Rotunjiți la a doua zecimală valoarea raportului numerelor naturale (28; 42) și [28; 42].

(3p) 3. Se consideră numerele naturale $p = 5^{n+3} - 5^{n+1}$ și $q = 5^{n+2} + 5^{n+3}$. Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, raportul numerelor p și q este constant.

Fișă pentru portofoliul elevului

Numele și prenumele:

Clasa a VI-a

Capitolul: Rapoarte. Proportii

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. Dacă propoziția este adevărată, subliniați litera A, iar dacă propoziția este falsă, subliniați litera F.

(7p) 1. Dacă 4 pâini costă 6 lei, atunci 6 pâini de același fel costă 9 lei. A F

(7p) 2. Într-o urnă sunt 4 bile albe și 5 bile negre. Se extrage o bilă. Probabilitatea ca bila extrasă să fie albă este egală cu $\frac{4}{9}$. A F

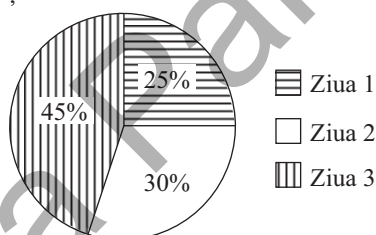
(7p) 3. Din tabelul următor rezultă că mărimile x și y sunt direct proporționale. A F

x	2	4	6
y	18	9	6

II. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect.

(7p) 1. Dacă numerele naturale a , b și c sunt invers proporționale cu 13, 11, respectiv 17, atunci cel mai mare dintre ele este

(7p) 2. Pentru vizitarea unor obiective turistice, elevii clasei a VI-a B au parcurs cu un autocar distanța de 420 km în trei zile conform diagramei următoare.



Distanța parcursă în prima zi a fost egală cu

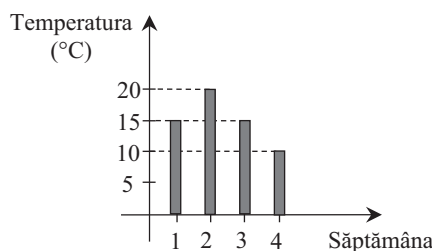
(7p) 3. Se consideră mulțimea $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Alegând un element din mulțimea E , probabilitatea ca acesta să fie număr prim este egală cu

III. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(8p) 1. Numerele x , y și z sunt direct proporționale cu 1,(3), 1,75 și 2,(6). Știind că $x + y - z = 5$, numerele x , y și z sunt egale cu:

A. 10, 12, 14; B. 16, 21, 32; C. 15, 20, 25; D. 14, 21, 28.

(8p) 2. În luna octombrie s-a măsurat și calculat temperatura medie săptămânală. Rezultatele obținute sunt reprezentate în graficul următor.



Valoarea temperaturii medii în luna octombrie a fost egală cu:

A. 15°C ; B. 16°C ; C. 14°C ; D. 18°C .

- (8p) 3. Nouă pompe de aceeași capacitate golesc un rezervor plin cu apă în 4 ore.
Câte pompe de aceeași capacitate golesc același rezervor în 6 ore?
A. 4 pompe; B. 5 pompe; C. 6 pompe; D. 8 pompe.

La exercițiile IV. și V. scrieți pe fișă rezolvările complete.

- IV. Alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre nenule,
(8p) calculați probabilitatea ca acesta să fie mai mare decât răsturnatul său.

V. Unghiurile O_1 , O_2 , O_3 și O_4 sunt unghiuri în jurul punctului O .

- (8p) a) Determinați măsurile celor patru unghiuri, știind că sunt invers proporționale cu numerele 3,5, 2,(3), 1,75, respectiv 1,1(6).
(8p) b) Determinați măsurile celor patru unghiuri, știind că sunt direct proporționale cu numerele 1,(6), 0,8(3), 1,25, respectiv 2,5.

GEOMETRIE

Capitolul I

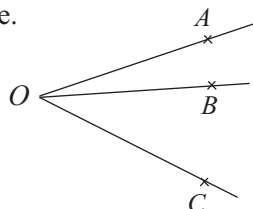
NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

Lecția 1. Unghiuri adiacente



Citesc și rețin

Definiție: Două unghiuri **proprii** se numesc **unghiuri adiacente** dacă au vârful comun, au o latură comună, iar celelalte două laturi sunt situate de o parte și de alta a laturii comune.



$\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt unghiuri adiacente.

Pentru figura precedentă sunt adevărate următoarele egalități:

- $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$ (unghi sumă);
- $\angle AOC - \angle AOB = \angle BOC$ (unghi diferență);
- $\angle AOC - \angle BOC = \angle AOB$ (unghi diferență).

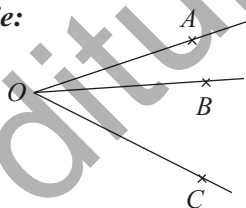


Cum se aplică?

1. Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente. Știind că:

- a) $\angle AOB = 22^\circ 43'$ și $\angle BOC = 40^\circ 15'$, aflați $\angle AOC$;
- b) $\angle AOC = 79^\circ 18'$ și $\angle AOB = 36^\circ 14'$, aflați $\angle BOC$.

Soluție:

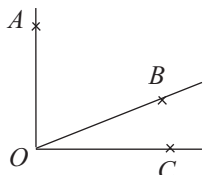


a) Observăm că $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 22^\circ 43' + 40^\circ 15' = 62^\circ 58'$;

b) Observăm că $\angle BOC = \angle AOC - \angle AOB = 79^\circ 18' - 36^\circ 14' = 43^\circ 4'$.

2. Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente și complementare. Dacă $\angle AOB = 3\angle BOC + 14^\circ$, aflați $\angle AOB$ și $\angle BOC$.

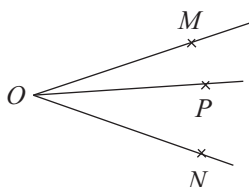
Soluție:



Observăm că $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$ sau $3\angle BOC + 14^\circ + \angle BOC = 90^\circ$, deci $4\angle BOC = 90^\circ - 14^\circ$, prin urmare $\angle BOC = 76^\circ : 4$, de unde rezultă că $\angle BOC = 19^\circ$; $\angle AOB = 3 \cdot 19^\circ + 14^\circ = 57^\circ + 14^\circ = 71^\circ$.

3. Semidreapta OP este situată în interiorul unghiului MON cu măsura de 70° . Știind că $\angle MOP = \frac{3}{4} \angle NOP$, calculați măsurile unghiurilor MOP și NOP .

Soluție:



Notăm $\angle NOP = x$. Observăm că $\angle MOP + \angle NOP = \angle MON$,
deci $\frac{3}{4}x + x = 70^\circ$, prin urmare $\frac{3x}{4} + \frac{4x}{4} = 70^\circ$ sau $\frac{7x}{4} = 70^\circ$,
de unde rezultă că $x = 70^\circ : \frac{7}{4}$, deci $x = 70^\circ \cdot \frac{4}{7}$ și
obținem $x = 40^\circ$, așadar $\angle NOP = 40^\circ$ și $\angle MOP = 30^\circ$.

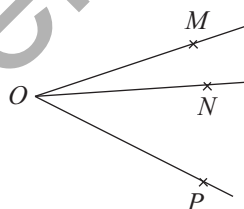


Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Pentru figura alăturată, stabiliți care dintre următoarele perechi de unghiuri sunt adiacente, completând caseta cu răspunsul corespunzător „Da” sau „Nu”.

- a) $\angle MON$ și $\angle MOP$; ☐
b) $\angle MOP$ și $\angle NOP$; ☐
c) $\angle MON$ și $\angle NOP$. ☐



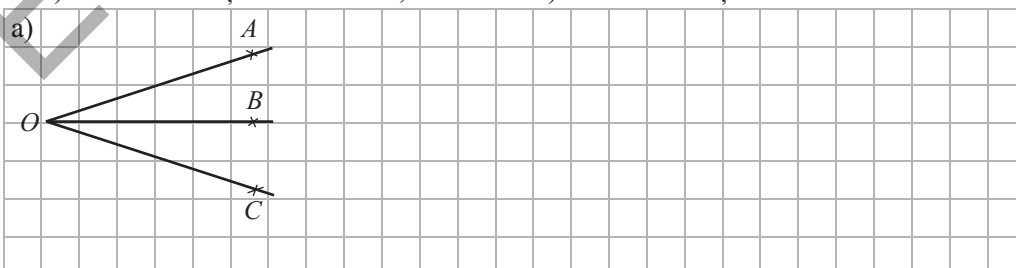
2. Construiți următoarele unghiuri adiacente, precizând mai întâi latura lor comună:

- a) $\angle CDE$ și $\angle EDF$; b) $\angle MNP$ și $\angle MNQ$.



3. Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente. Calculați măsura unghiului AOC în următoarele cazuri:

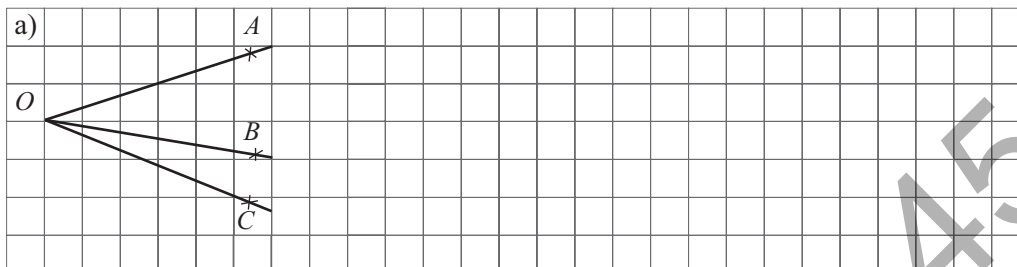
- a) $\angle AOB = 37^\circ$ și $\angle BOC = 52^\circ$; b) $\angle AOB = 77^\circ$ și $\angle BOC = 35^\circ$.



4. Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente.

a) Dacă $\angle AOC = 93^\circ$ și $\angle AOB = 60^\circ$, aflați $\angle BOC$.

b) Dacă $\angle AOC = 123^\circ$ și $\angle BOC = 81^\circ$, aflați $\angle AOB$.



Exerciții și probleme de dificultate redusă

5. Unghiurile MON și NOP sunt adiacente. Aflați măsura unghiului MOP , dacă:

a) $\angle MON = 20^\circ 32'$, $\angle NOP = 65^\circ 15'$;

b) $\angle MON = 46^\circ 29'$, $\angle NOP = 52^\circ 45'$.

6. Folosind un echer, o coală de hârtie și un creion, arătați că unghiurile ascuțite ale echerului sunt complementare (au suma egală cu 90°).

7. Unghiurile MON și NOP sunt adiacente. Știind că:

a) $\angle MOP = 125^\circ 8'$, $\angle NOP = 15^\circ 20'$, aflați $\angle MON$;

b) $\angle MOP = 91^\circ 21'$, $\angle NOM = 36^\circ 35'$, aflați $\angle NOP$.

8. Semidreapta OC este situată în interiorul unghiului AOB . Dacă:

a) $\angle AOB = 100^\circ$ și $\angle AOC = 13^\circ 27'$, arătați că unghiul BOC este ascuțit;

b) $\angle AOB = 112^\circ$ și $\angle BOC = 10^\circ 24'$, arătați că unghiul AOC este obtuz;

c) $\angle AOC = 31^\circ 13'$ și $\angle COB = 58^\circ 47'$, arătați că unghiul AOB este drept.

9. Semidreptele OB și OC sunt interioare unghiului drept AOD , astfel încât unghiurile AOB și BOC , respectiv BOC și COD sunt adiacente. Aflați măsurile unghiurilor AOB , BOC și COD , știind că acestea se exprimă prin trei numere naturale consecutive.

10. Determinați măsurile unghiurilor adiacente AOB și BOC , știind că:

a) $\angle AOC = 48^\circ$ și $\angle AOB = 2\angle BOC$;

b) $\angle AOC = 61^\circ$ și $\angle BOC = 3\angle AOB$;

c) $\angle AOC = 75^\circ$ și $\angle AOB = \angle BOC + 7^\circ$;

d) $\angle AOC = 56^\circ$ și $\angle BOC = \angle AOB - 9^\circ$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

11. Determinați măsurile unghiurilor adiacente AOB și BOC , în următoarele cazuri:

a) $\angle AOC = 87^\circ$ și $\angle AOB = 3\angle BOC + 5^\circ 24'$;

b) $\angle AOC = 95^\circ$ și $\angle BOC = 5\angle AOB - 3^\circ 42'$.

12. Pe latura BC a triunghiului ABC se consideră punctele D , E și F în această ordine. Știind că măsurile unghiurilor BAD , DAE , EAF și FAC , exprimate în grade, sunt

numere prime consecutive, determinați măsura unghiului BAC , știind că aceasta este, de asemenea, un număr prim.

13. Semidreapta OP este situată în interiorul unghiului MON . Știind că $\sphericalangle MON = 75^\circ$ și $\sphericalangle MOP = 60\%$ din $\sphericalangle MON$, calculați $\sphericalangle NOP$.

14. Semidreapta OF este situată în interiorul unghiului DOE . Știind că $\sphericalangle DOE = 100^\circ$ și $\sphericalangle EOF = \frac{2}{3}\sphericalangle DOF$, determinați $\sphericalangle DOF$ și $\sphericalangle EOF$.

15. Pe latura EF a triunghiului DEF se consideră punctele M și N în această ordine. Știind că $\sphericalangle EDF = 90^\circ$, $\sphericalangle EDM = \frac{1}{2}\sphericalangle MDN$ și $\sphericalangle NDF = \frac{3}{4}\sphericalangle MDN$, determinați $\sphericalangle EDM$, $\sphericalangle MDN$ și $\sphericalangle NDF$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

16. Pe latura EF a triunghiului DEF se consideră punctele $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n, n \geq 1$, în această ordine. Știind că $\sphericalangle EDF = 84^\circ$, iar măsurile unghiurilor $EDD_1, D_1DD_2, D_2DD_3, \dots, D_nDF$ (exprimate în grade) sunt egale cu $a, a+1, a+2, \dots, 2a, a \in \mathbb{N}$, aflați măsurile acestor unghiuri.

17. Pe latura BC a triunghiului ABC se consideră punctele $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$, unde $n \geq 2$, în această ordine, și notăm $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle A_1, \sphericalangle A_1AA_2 = \sphericalangle A_2, \sphericalangle A_2AA_3 = \sphericalangle A_3, \dots, \sphericalangle A_{n-1}AC = \sphericalangle A_n$. Aflați măsurile acestor unghiuri, știind că $\sphericalangle A = 45^\circ, \sphericalangle A_1 \in \mathbb{N}, \sphericalangle A_2 = 2\sphericalangle A_1, \sphericalangle A_3 = 3\sphericalangle A_1, \dots, \sphericalangle A_n = n \cdot \sphericalangle A_1$.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

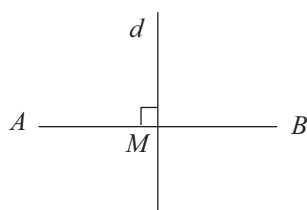
- (3p) **1.** Se consideră unghiurile adiacente MON și NOP . Știind că $\sphericalangle MON = 37^\circ$ și $\sphericalangle NOP = 45^\circ$, calculați $\sphericalangle MOP$.
- (3p) **2.** Se consideră unghiurile adiacente EOD și DOF . Știind că:
- $\sphericalangle EOF = 85^\circ 29'$ și $\sphericalangle EOD = 52^\circ 14'$, calculați $\sphericalangle DOF$;
 - $\sphericalangle EOF = 114^\circ 8'$ și $\sphericalangle DOF = 37^\circ 45'$, calculați $\sphericalangle EOD$.
- (3p) **3.** Semidreapta OC este situată în interiorul unghiului AOB cu măsura de 75° . Determinați măsurile unghiurilor AOC și COB , știind că acestea sunt două numere naturale multipli consecutivi ai lui 5.

Lecția 11. Mediatoarea unui segment. Construcția mediatoarei unui segment



Citesc și rețin

Definiție: Dreapta care trece prin mijlocul unui segment și este perpendiculară pe acesta se numește mediatoarea segmentului respectiv.



Construcția mediatoarei unui segment

Construcția mediatoarei unui segment se realizează cu ajutorul riglei gradate și al echerului, astfel: cu rigla gradată se măsoară segmentul respectiv și apoi jumătate din lungimea acestuia se măsoară pe segment, începând dintr-o extremitate, pentru a construi mijlocul segmentului; cu ajutorul echerului se construiește apoi o perpendiculară pe segmentul respectiv în mijlocul său, dreapta respectivă fiind mediatoarea segmentului.



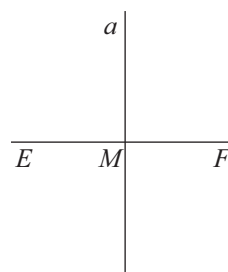
Cum se aplică?

1. Construieți segmentul EF cu lungimea de 3 cm și dreapta a , mediatoarea acestuia.

Soluție:

Folosind rigla gradată, construim segmentul EF cu lungimea de 3 cm; $3 \text{ cm} : 2 = 1,5 \text{ cm}$; măsurăm pe segmentul EF dintr-un capăt al acestuia, 1,5 cm și astfel construim punctul M , mijlocul acestuia.

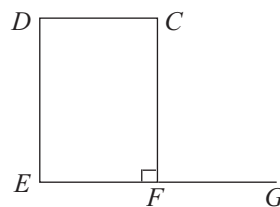
Cu ajutorul echerului construim în punctul M dreapta $a \perp EF$; dreapta a este mediatoarea segmentului EF .



2. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $CDEF$, iar punctul G este simetricul punctului E față de punctul F . Arătați că dreapta CF este mediatoarea segmentului EG .

Soluție:

Punctele E , F și G sunt coliniare și $EF \equiv FG$, iar $\angle EFD = 90^\circ$, deoarece $CDEF$ este dreptunghi, prin urmare dreapta DF este mediatoarea segmentului EG .



3. Construieți unghiul XOY cu măsura de 120° și punctele $A \in OX$ și $B \in OY$, astfel încât $OA \equiv OB$. Mediatoarele segmentelor OA și OB intersectează segmentul AB în punctele E , respectiv F . Ce puteți spune despre laturile și unghiurile triunghiului OEF ?